COMPONENTS OF THE STABLE AUSLANDER-REITEN QUIVER FOR A SYMMETRIC ORDER OVER A COMPLETE DISCRETE VALUATION RING

KENGO MIYAMOTO

Abstract. Let $\mathcal{O}$ be a complete discrete valuation ring, κ the residue field of $\mathcal{O}$, A a symmetric $\mathcal{O}$-order. In this paper, we report that if $A \otimes \kappa$ is of representation-finite, then the configurations of components of the stable Auslande-Reiten quiver of A without loops is determined by infinite Dynkin diagrams or a Euclidean diagrams and admissible groups. In addition, we give the configurations of components of the stable Auslander–Reiten quiver containing Heller lattices over the symmetric Kronecker algebra.

1. 謝辞

この度は環論および表現論シンポジウムでの講演の機会をいただきまして, 責任者, 関係者の皆様に深く御礼申し上げます. また, 本研究は, 日本学術研究振興会 科学研究費助成事業 18J10561 の助成を受けております.

2. 序論

多元環の表現論の大きな目標のひとつは, 与えられた環の加群圏の構造を明らかにすることである. 1970 年代に Auslander と Reiten によって概分裂完全列という概念が導入されて以来, 多元環の表現論は多くの成果をあげるようなった. 概分裂完全列の情報から有向グラフを構成し, 加群圏の構造を理解する理論を Auslander–Reiten 理論という. これは, 直既約加群の同型類を頂点におき, 既約写像とよばれる "極小" な写像があるときに矢印を引く, というルールで加群圏の構造の骨格を可視化する理論である. この有向グラフを AR 箙といい, 現在, Auslander-Reiten 理論は加群圏だけでなく, 加群圏の部分圏 ([AS]) や三角圏 ([Hap]) への理論の適用, 代数幾何学 ([A3]), 代数トポロジーの分野 ([J]) への応用など表現論のひとつの金字塔になっている. AR 箙は代数の持つホモロジー的な性質や不変量の情報をもつので, これを一部でも決定することは表現論の重要な問題である. AR 転移によって安定付値箙となるような安定 AR 箙の極大充満部分箙を安定 AR 箙といい, 体上の有限次元代数の場合はその構造論がよく知られいている ([Erd, SY1, SY2]) が, 係数環が完備離散付値環の整環の場合には事情が異なっている. 本稿は, 完備離散付値環上の対称的整環の安定 AR 箙の構造論に関する報告である.

$\mathcal{O}$ を完備離散付値環とする. $\mathcal{O}$ 上の代数 A が**整環**とは, A が $\mathcal{O}$ 加群として有限階数の自由加群であるときをいう. $\mathcal{O}$ 上の整環 A が **Gorenstein** とは, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{O}}(A, \mathcal{O})$ が射影的であるときをいい, A と $\mathsf{Hom}_{\mathcal{O}}(A, \mathcal{O})$ が (A, A) 両側加群として同型な Gorenstein 整環を対称的整環という. 以下, 加群は全て右加群を扱う. A を完備離散付値環上の整環とする. A 加群 M が A 上の**格子**とは, M が有限階数の自由 $\mathcal{O}$ 加群であるときをいう. もし, $\mathcal{O}$ が体ならば, 整環とは有限次元代数, 格子は有限次元加群となるため, 整環や格子はこれら有限次

本研究は [AKM, M1] に掲載されている内容をまとめたものです.

元代数や有限次元加群の概念を完備離散付値環を係数にかえたものであると認識できる. 有限生成 A 加群のなす圏を $\mathsf{mod}\text{-}A$ と書き, その充満部分圏で A 格子のなす圏を $\mathsf{latt}\text{-}A$ とかく.

完備離散付値環を係数環にもつ整環の Auslander-Reiten 理論は, その一般論のみが先行しており, その一般論が実際の計算を実行することが困難であるということを示唆していた関係もあり, AR 箙の実例がほとんどなかった. これは, 概分裂完全列の計算が絶望的であったことに起因していたが, [AKM] により, Gorenstein 整環の概分裂完全列の計算を行う具体的な手続きを与えられ, これを応用して一変数剰余多項式環の Heller 格子と呼ばれる格子を含む安定 AR 箙の連結成分を決定している. しかし, 依然として計算実行例はほとんどなく, 安定 AR 箙の形状についてはほとんど未知である.

A を $\mathcal{O}$ 上の整環とする. 格子圏 $\mathsf{latt}\text{-}A$ の概分裂完全列については, その存在自体が非自明であり, $\mathsf{latt}\text{-}A$ が概分裂完全列をもつための必要十分条件は A が孤立特異点であることである ([A2]). ここに, A が孤立特異点とは, A に $\mathcal{O}$ の商体 K を $\mathcal{O}$ 上でテンソルをとったときに半単純であるときをいう. 例えば, 有限群の p-モジュラー系の群代数は孤立特異点である. 本稿では, 孤立特異点でないような整環も扱う. 従ってこの場合は $\mathsf{latt}\text{-}A$ の充満部分圏で概分裂完全列をもつような「良い」部分圏を扱うわけだが, A を対称的整環, K を $\mathcal{O}$ の商体とすれば, A 格子 M が概分裂完全列の終域に現れるための必要十分条件は $M \otimes K$ が $A \otimes K$ 加群として射影的であることである. 従って, $\mathsf{latt}\text{-}A$ の充満部分圏

$$\mathsf{latt}^{(\natural)}\text{-}A := \{M \in \mathsf{latt}\text{-}A \mid M \otimes K \text{ は射影 } A \otimes K \text{ 加群 }\}$$

は概分裂完全列をもつことが知られている. 更に, $\mathsf{latt}^{(\natural)}\text{-}A$ の概分裂完全列は $\mathsf{latt}\text{-}A$ の概分裂完全列である. この報告集では, この $\mathsf{latt}^{(\natural)}$ の安定 AR を考察する.

以下, 本稿を通して A は対称的な整環であるとする. A が有限 CM 型（つまり, 直既約な A 格子の同型類が有限個であるような整環）であれば, A は孤立特異点である ([A2]). この場合は, Luo によって, その構造論が調べられているため ([Lu]), 有限 CM 型ではないような整環を扱う. すなわち, 安定 AR 箙は無限個の頂点をもつものを考える.

対称的な整環に対して, その安定 AR 箙の構造論を与えるために, Webb の手法 ([We]) を踏襲することが有効である. これは, 安定付値箙の Riedtmann による構造定理 ([Ri]) と Happel, Preiser, Ringel による有向木のカルタン行列による特徴付け ([HPR]) を応用する方法である. 有限次元代数の場合とは異なり, 安定 AR 箙の連結成分はループをもつ可能性があるが, もしループが存在していなければある有向木 T とある群 G によって $\mathbb{Z}T/G$ の形をしていることがわかる. 従ってその形状は T に依存していると言えるため, これの候補を与えることが目標になる. ここでは, 完備離散付値環 $\mathcal{O}$ の剰余体 k を対称整環 A にテンソルした際に有限表現型となるような整環について, その安定 AR 箙の構造論を与えた.

Theorem 1 ([M1])**.** *$\mathcal{O}$ を完備離散付値環, k をその剰余体とする. もし, $A \otimes k$ が有限表現型で安定 AR 箙の連結成分がループを持たなければ, その連結成分はある無限 Dynkin 図形または Euclidean 図形 T と部分群 $G \subset \mathsf{Aut}(\mathbb{Z}T)$ で $\mathbb{Z}T/G$ とかける.*

他方, ループを持つ場合には, そのループというのは homogenious tube の境界に付値 $(1, 1)$ で現れる.

Theorem 2 ([AKM, M1]). $\mathcal{O}$ を完備離散付値環, k をその剰余体とする. もし, 安定 AR 箙の連結成分 C がループを持てば, C は次の形をしている:

$$C = \circlearrowleft\bullet \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows \cdots\cdots \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows \cdots$$

3. 安定 AR 箙の構造論と主結果

以下, 特に断らない限り, $\mathcal{O}$ は完備離散付値環, k はその剰余体で K はその商体とする. また, A は $\mathcal{O}$ 上の整環とする. 安定 AR 箙は概分裂完全列の情報から記述されるので, まずはこれを定義しよう.

Definition 3. $X, Y \in \mathsf{latt}A$ に対して, $\mathsf{Hom}_A(X,Y)$ の **Jacobson 根基**を以下で定める.

$$\mathsf{rad}(X,Y) = \{f : X \to Y \mid \text{任意の } g : Y \to X \text{ に対して } 1_X - gf \text{ は可逆}\}$$

これは, 任意の $g : Y \to X$ に対して, $1_Y - fg$ が可逆となるような A-加群準同型 $f : X \to Y$ 全体と一致している.

Definition 4. $L, M, N \in \mathsf{latt}\text{-}A$ とする. 短完全列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \xrightarrow{\ p\ } N \longrightarrow 0$$

が N を終域にもつ**概分裂完全列**であるとは以下の 3 条件を満たす時をいう.

(i) p はレトラクションではない.
(ii) L および N は直既約 A 格子である.
(iii) 任意の直既約 A 格子 X に対して,

$$\mathsf{Hom}_A(X,p) : \mathsf{Hom}_A(X,M) \longrightarrow \mathsf{rad}(X,N)$$

は全射である.

概分裂完全列は既約写像によって特徴づけられ, 従って N を終域にもつ概分裂完全列は同型を除いてただひとつに定まる. つまり, $\mathsf{latt}\text{-}A$ の短完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\ f\ } M \xrightarrow{\ g\ } N \longrightarrow 0$$

が N を終域にもつ概分裂完全列であることと f, g が既約写像であって, L, N が直既約あることは同値である ([ARS, Proposition V.5.9.]). 従って, N を終域にもつ概分裂完全列は同型を除いてただひとつに定まるから, 概分裂完全列

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\ f\ } M \xrightarrow{\ g\ } N \longrightarrow 0$$

に対して, $\mathsf{latt}A$ の **AR 転移**を $\tau(N) = L$, $\tau^{-1}(L) = N$ で定義する.

有限次元代数の場合とは異なり, 非射影直既約 A 格子がいつでも概分裂完全列の終域に現れるとは限らない.

Proposition 5 ([AR]). A を対称的整環, K を $\mathcal{O}$ の商体とする. A 格子 M が概分裂完全列の終域に現れるための必要十分条件は $M \otimes K$ が $A \otimes K$ 加群として射影的であることである. 従って, $\mathsf{latt}\text{-}A$ の充満部分圏

$$\mathsf{latt}^{(\natural)}\text{-}A := \{M \in \mathsf{latt}\text{-}A \mid M \otimes K \text{ は射影 } A \otimes K \text{ 加群}\}$$

は概分裂完全列をもつ. 更に, $\mathsf{latt}^{(\natural)}\text{-}A$ の概分裂完全列は $\mathsf{latt}\text{-}A$ の概分裂完全列である.

Example 6. 直既約 $A\otimes\kappa$ 加群 N の mod-A 上の first syzygy を Z_N とおく. Z_N および Z_N に現れる直和因子を N の **Heller 格子**と呼ぶ. Heller 格子はいつでも $\mathsf{latt}^{(\natural)}$-$A$ に入ることが簡単にわかる.

概分裂完全列を計算することは非常に困難を極めるが, これを計算する手続きは次のように与えられている.

Proposition 7 ([AKM]). A は対称的な整環とし, M は直既約な非射影的 A 格子で $M \in \mathsf{latt}^{(\natural)}$-$A$ であるとする. $p: P \to M$ を M の射影被覆とし, $\varphi \in \mathsf{End}_A(M)$ をひとつとり, p と φ に関する引き戻しを考える.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & P \arrow[r, "p"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

このとき次の 2 条件は同値である.

(1) 引き戻しにより得られた短完全列 $0 \to L \to E \to M \to 0$ は M を終域にもつ概分裂完全列である.

(2) 次の 3 条件を満たす.
  - (i) φ は p を経由しない.
  - (ii) L は直既約 A 格子である.
  - (iii) 任意の $f \in \mathsf{radEnd}_A(M)$ に対して φf は p を経由する.

更に, 全ての概分裂完全列は上記の手続きで得られる.

特に対称的な整環の AR 転移は first syzygy と自然同値である.

Example 8. $A = \mathcal{O}[x]/(x^3)$ とすると, 直既約 $A\otimes k$ 加群は $A\otimes k$, $M=(x)/(x^3)$, $S=(x^2)/(x^3)$ の 3 つである. $y = x+(x^3)$ とおくと, それぞれの k-基底は

$$M = ky \oplus ky^2, \quad S = ky^2$$

ととる. $\mathcal{O}$ の uniformizer を ε とおくと, M, S それぞれの Heller 格子は

$$Z_M = \mathcal{O}\varepsilon \oplus \mathcal{O}\varepsilon y \oplus \mathcal{O}y^2,\ Z_S = \mathcal{O}\varepsilon \oplus \mathcal{O}y \oplus \mathcal{O}y^2$$

となる. $Z_M \otimes K \simeq A\otimes K \simeq Z_S \otimes K$ より, これら Heller 格子は直既約 A-格子である.

Z_M の射影被覆は $p: A\oplus A \ni (1_A, 1_A) \mapsto (\varepsilon, y^2) \in Z_M$ で与えられるから, その核は $\mathcal{O}(y^2,\varepsilon)\oplus\mathcal{O}(0,y)\oplus\mathcal{O}(0,y^2)$ となり, $\tau(Z_M)\simeq Z_S$ を得る. このとき, $\varphi \in \mathsf{End}_A(M)$ を上記の $\mathcal{O}$-基底で行列表示すると

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるものを取れば, これは Proposition 7 の条件 (i) から (iii) を満たす. よって, Z_M を終域にもつ概分裂完全列は

$$0 \to Z_S \to A\oplus A \xrightarrow{p} Z_M \to 0$$

の p と φ による引き戻しで得られる.

安定 AR 箙の定義を述べよう. 安定 AR 箙とは概分裂完全列の情報を箙を用いて図示したものである.

Definition 9. 対称的な整環 A の**安定 AR 箙** $\Gamma_s(A)$ は次のルールで構成される安定転移付値箙である.

- 頂点には $\mathsf{latt}^{(\natural)}$-$A$ の非射影的直既約 A 格子の同型類をおく.
- 既約写像 $f : M \to N$ が存在するときに矢印 $M \to N$ を引く.
- 付値 $v(M \to N) = (a, b)$ は次のルールで与える.
  - (i) N を終域にもつ概分裂完全列の中央項に M が a 回現れる.
  - (ii) M を始域にもつ概分裂完全列の中央項に N が b 回現れる.

以下, 安定 AR 箙は**無限頂点をもつ**ことを仮定する.

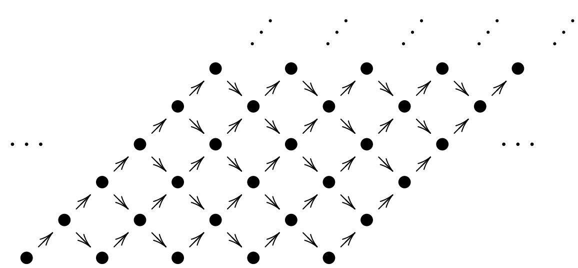
Remark 10. 代数閉体上の有限次元代数の場合とは異なり, 完備離散付値環上の整環の場合は, その AR 箙がループを許す ([Wi]). また, $a = b$ は保証されない.

Definition 11. (Δ, v) を付値箙とする. このとき (Δ, v) に対して, 次のように局所的有限な安定転移付値箙を構成できる ([Ri]).

- 頂点集合は $\mathbb{Z} \times \Delta_0$ とする.
- 矢印 $x \to y \in \Delta_1$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 矢印 $(n, x) \to (n, y)$ と $(n-1, y) \to (n, x)$ を引く.
- $v(x \to y) = (a, b)$ のとき, $v((n, x) \to (n, y)) = (a, b)$, $v((n-1, y) \to (n, x)) = (b, a)$ と定める.
- translation ϕ を $\phi((n, x)) = (n-1, x)$ で定める.

この安定転移付値箙を $\mathbb{Z}\Delta$ とかく.

Example 12. 安定転移付値箙 $\mathbb{Z}A_\infty$ は次のような形である:



安定転移箙 (Q, v, τ) に対して, $\mathrm{Aut}(Q)$ は射の合成を積として群になる. $\mathsf{Aut}(Q)$ の部分群 G が**許容群**であるとは, G 軌道 $Gx = \{g(x) \mid g \in G,\ x \in Q_0\}$ が任意の y に対して

$$\sharp(Gx \cap (y^- \cup \{y\})) \leq 1, \quad \sharp(Gx \cap (y^+ \cup \{y\})) \leq 1$$

を満たすときをいう. 許容群 G があるとき, 次のようにして安定転移付値箙 $(Q/G, v/G, \tau/G)$ が構成される.

- $(Q/G)_0$ は Q_0 の G 軌道.
- $(Q/G)_1$ は Q_1 の G 軌道.
- v/G や τ/G は v, τ より誘導されたもの.

G が許容群であるという条件より, $Q \to Q/G$ が被覆になっていることに注意する.

Example 13. $Q = \mathbb{Z}A_\infty$ のとき, 許容群は τ によって生成される巡回群しかない.

ループのない安定転移付値箙の構造論は Riedtmann によって与えられている.

Proposition 14 ([Ri])**.** *ループのない安定転移付値箙* (Q, v, τ) *の連結成分* C *をとる．このとき，有向木* T *と許容群* $G \subset \mathsf{Aut}(\mathbb{Z}T)$ *で* $C \simeq \mathbb{Z}T/G$ *となるようなものが次の意味で一意的に存在する．*

(1) *台グラフ* $\overline{T}$ *は* C *にのみ依存して一意的に定まる．*
(2) *許容群* G *は* $\mathsf{Aut}(\mathbb{Z}T)$ *の共役を除いて一意的に定まる．*

このとき，台グラフ $\overline{T}$ *を* C *の* ***tree class*** *という．*

従って，安定 AR 箙の連結成分がループを持たない場合は，その形状は T の候補を与えれば良いことがわかる．そのために，劣加法的関数というものを導入しよう．A を対称的な整環，C を安定 AR 箙の連結成分とする．C が**周期的**であるとは，ある頂点 $x \in C$ に対して，$x = \tau^k x$ となる非負整数 k が存在する時をいう．このとき，AR 転移は C 上安定であることから，C に現れる全ての頂点は周期的である．C がループと 2-サイクルを持たないとしよう．このとき，

$$C(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{if } x = y, \\ -d_{x,y} & \text{if } y \in x^+, \\ -d'_{y,x} & \text{if } y \in x^-, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

で定められる関数 $C(-,-)$ は C のカルタン行列を与える．関数 $\ell : C \to \mathbb{Q}_{>0}$ が**劣加法的関数**であるとは，任意の $x \in C$ に対して

$$\sum_{y \in C} C(x,y)\ell(y) \geq 0$$

が成り立つ時をいう．この不等号が常に等号である時，**加法的**であるいう．

Remark 15. $\overline{T}$ を C の tree class とする．もし，関数 $\ell : Q_0 \to \mathbb{Q}_{>0}$ が条件 $\ell(\tau x) = \ell(x)$ と

$$2\ell(x) \geq \sum_{y \in x^- \cap T} d_{y,x}\ell(y) + \sum_{y \in x^+ \cap T} d'_{x,y}\ell(y),$$

を満たす時，tree class T への制限 $\ell|_T$ は劣加法的関数となる．

Proposition 16 ([B, Theorem 4.5.8])**.** *安定 AR 箙の連結成分* C *がループを持たないとし，*$\overline{T}$ *を* C *の tree class とする．このとき，*ℓ *が* T *上の劣加法的関数ならば次が成り立つ．*

(1) *台グラフ* $\overline{T}$ *は有限または無限 Dynkin 図形か Euclidean 図形である．*
(2) *もし，*ℓ *が加法的でなければ，*$\overline{T}$ *は有限 Dynkin 図形か* A_∞ *である．*
(3) *もし，*ℓ *が加法的ならば，*$\overline{T}$ *は無限 Dynkin 図形か Euclidean 図形である．*

Lemma 17. *C が周期的でループを持たないとする．関数* $\mathcal{R} : C \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ *を*

$$\mathcal{R}(X) := \sum_{i=0}^{n_X - 1} \frac{\mathsf{rank}(\tau^i X)}{n_X}$$

で定義する．ここに $X \simeq \tau^{n_X}(X)$ *である．このとき，*$\mathcal{R}$ *は* T *上で劣加法的である．*

Proof. 不等式

$$\sum_{Y \in X^-} d_{Y,X}\mathsf{rank}(Y) \leq \mathsf{rank}(X) + \mathsf{rank}(\tau X) \tag{3.1}$$

より, $\mathcal{R}$ は次の不等式を満たすことがわかる.

$$2\mathcal{R}(X) \geq \sum_{Y \in X^- \cap T} d_{Y,X}\mathcal{R}(Y) + \sum_{Y \in X^+ \cap T} d'_{X,Y}\mathcal{R}(Y) \tag{3.2}$$

実際, $n = \prod_{Y \to X} n_Y$ とおくと,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n_X n - 1}\left(\sum_{Y \to X} d_{\tau^k Y, \tau^k X}\mathsf{rank}(\tau^k Y)\right) &= \sum_{Y \to X}\sum_{k=0}^{n_X n - 1}(d_{Y,X}\mathsf{rank}(\tau^k Y)) \\
&= \sum_{Y \to X} d_{Y,X}\frac{n_X n}{n_Y}\sum_{k=0}^{n_Y - 1}\mathsf{rank}(\tau^k Y) \\
&= \sum_{Y \to X} d_{Y,X} n_X n \mathcal{R}(Y).
\end{aligned}$$

である. 他方,

$$\sum_{k=0}^{n_X n - 1}(\mathsf{rank}(\tau^k X) + \mathsf{rank}(\tau^{k+1} X)) = 2\frac{n_X n}{n_X}\sum_{k=0}^{n_X - 1}\mathsf{rank}(\tau^k X) = 2 n_X n \mathcal{R}(X)$$

なので, $\mathcal{R}$ は T 上で劣加法的である. □

従って, 次を得た:

Corollary 18. *安定 AR 箙の連結成分 C がループを持たないとすれば, その tree class は無限 Dynkin 図形である.*

他方, ループを持つ場合の安定 AR 箙は次の形をしている.

Theorem 19 ([AKM, M1])**.** *$\mathcal{O}$ を完備離散付値環, k をその剰余体とする. もし, 安定 AR 箙の連結成分 C がループを持てば, C は次の形をしている:*

$$C = \circlearrowleft \bullet \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows \cdots\cdots \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows \bullet \rightleftarrows \cdots$$

関数 $\mathcal{R}$ は周期的な連結成分にしか適用できない. そこで, 劣加法的関数の候補となる関数を定義しよう. 関数 $\mathcal{D} : \mathsf{latt}^{(\natural)}\text{-}A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を

$$\mathcal{D}(X) := \sharp\{X \otimes \kappa \text{ の非射影直既約因子 }\}$$

で定義する. A が対称的な整環のとき, $\mathcal{D}$ は τ 不変, すなわち $\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(\tau X)$ である.

Proposition 20 ([K3, Proposition 4,5])**.** *$0 \to \tau L \to E \xrightarrow{g} L \to 0$ を概分裂完全列とし, L は Heller 格子でないとする. このとき, 完全列*

$$0 \to \tau L \otimes \kappa \to E \otimes \kappa \to L \otimes \kappa \to 0$$

は分裂する.

Corollary 21. *C を安定 AR 箙の連結成分で, C に現れる Heller 格子 Z の概分裂完全列の中央項を E_Z とする. このとき, 全ての Heller 格子 Z で $2\mathcal{D}(Z) \geq \mathcal{D}(E_Z)$ ならば, $\mathcal{D}$ は劣加法的である.*

以上で次を得る.

Theorem 22. *Aを対称的な$\mathcal{O}$上の整環とし, $A\otimes k$は有限表現型とする. このとき, Aの安定AR箙がループを持たなければ, その tree class は無限 Dynkin 図形か Euclidean 図形である.*

Proof. 関数$\mathcal{D}$はτ不変であった. また, Proposition 20 より Heller 格子周辺以外のところでは加法的となっている. Cを安定 AR 箙のループをもたない連結成分とする. Cが周期的ならば Corollary 18 より示すことはない. Cが周期的でないとすると, 仮定から直既約 Heller 格子の同型類は有限個しかないので, $X\in C$でXを終域にもつ概分裂完全列に Heller 格子が現れないものが存在する. $\mathcal{D}$はτ不変であったので, その概分裂完全列に現れるCの頂点のτ軌道上で$\mathcal{D}$は加法的. よって Proposition 16 より主張を得る. □

Example 23. $A=\mathcal{O}[x]/(x^3)$は$A\otimes k$が有限表現型 (Aは孤立特異点ではないので有限 CM 型ではない) なので Theorem 22 より安定 AR 箙のループのもたない連結成分の tree class は無限 Dynkin 図形か Euclidean 図形である. Heller 格子 Z_M と Z_S を含む連結成分Cを決定しよう. Proposition 7 と Example 8 をみれば,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_S \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_M \arrow[r] \arrow[d] & Z_M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi=\begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 1&0&0 \end{pmatrix}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_S \arrow[r] & A\oplus A \arrow[r, "p"] & Z_M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

という引き戻し図形の上段の完全列が概分裂完全列になっている. 引き戻しを計算すると, ある直既約A格子E'_Mで$Z_M\simeq A\oplus E'_M$の形をしていることがわかるため, Theorem 19 よりCはループを持たない. また, 直接計算によって$\mathcal{D}(Z_M)=2$, $\mathcal{D}(E_M)=3$がわかるから$4=2\mathcal{D}(Z_M)>3=\mathcal{D}(E_M)$.

他方, $\tau(Z_S)=Z_M$よりCは周期的で$\mathcal{D}$がτ不変なので$\mathcal{D}$はCの tree class 上で加法的でない劣加法的関数である. Cは無限個の頂点を持つ周期的な連結成分だから, $C=\mathbb{Z}A_\infty/\langle\tau\rangle$となる.

References

[A1] M. Auslander, Functors and morphisms determined by objects, Proc. Conf. on Representation Theory, Philadelphia, Lecture Notes in Pure and Applied Math. **37**, Marcel Dekker, 1978.

[A2] M. Auslander, Isolated singularities and existence of almost split sequences, Representation Theory II (Ottawa, Ont., 1984), Lecture Note in Math., vol. 1178, Springer-Berlin (1986), 194–242.

[A3] M. Auslander, Almost split sequences and algebraic geometry. Representations of algebras (Durham, 1985), 165–179, London Math. Soc. Lecture Note Series **116**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.

[AKM] S. Ariki, R. Kase and K. Miyamoto, On Components of stable Auslander–Reiten quivers that contain Heller lattices: the case of truncated polynomial rings, Nagoya math. J., **228** (2017), 72–113.

[AR] M. Auslander and I. Reiten, Almost split sequences for Cohen-Macaulay modules, Math. Ann. **277** (1987), 345–349.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø, Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge studies in advanced mathematics **36**, Cambridge University Press, 1995.

[AS] I. Assem, S. Smalø, Lattices over orders: finitely presented functors and preprojective partitions, Trans. Amer. Math. Soc. **273**(1982), no. 2, 433–446.

[ASS] I. Assem, D. Simson and A. Skowroński, Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, London Mathematical Society Student Texts **65**, 2006.

[B] D. Benson, Representations and Cohomology, I: Basic representation theory of finite groups and associative algebras, Cambridge studies in advanced mathematics **30**, 1991.

[CR] C. W. Curtis and I. Reiner, Methods of Representation Theory. Vol. I. With Applications to Finite Groups and Orders. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons Inc., 1981.

[Erd] K. Erdmann, Blocks of tame representation type and related algebras, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1990.

[ES] K. Erdmann, A. Skowroński, Weighted surface algebras, J. Algebra **505** (1) (2018), 490–558.

[Hap] D. Happel, Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[HL] F. Huard and S. Liu, Tilted Special Biserial Algebras, J. Algebra **217** (2) (1999), 679–700.

[HPR] D. Happel, U. Preiser and C. M. Ringel, Vinberg's characterization of Dynkin diagrams using subadditive function with application to DTr-periodic modules. Representation Theory II, Lecture Notes in Mathematics **832**, Springer-Verlag, 1979, 280–294.

[I] O. Iyama, Representation theory of orders, Algebra-representation theory (Constanta, 2000), 63–96, NATO Sci. Ser.II Math. Phys. Chem., **28**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001., **217** (1999), 679–700.

[J] P. Jørgensen, Calabi-Yau categories and Poincaré duality spaces. Trends in representation theory of algebras and related topics, 399–431, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008.

[K3] S. Kawata, On Heller lattices over ramified extended orders, J. Pure and Applied Algebra **202** (2005), 55–71.

[K4] S. Kawata, On Auslander–Reiten Components and Heller Lattices for Integral Group Rings, Algebra Represent. Theory **9** (2006), 513–524.

[Lu] X. Luo, 0-Calabi–Yau configurations and finite Auslander–Reiten quivers of Gorenstein orders, J. Pure and Applied Algebra, Volume **219**, Issue 12 (2015), 5590–5630.

[M1] K. Miyamoto, On the non-periodic stable Auslander–Reiten Heller component for the Kronecker algebra over a complete discrete valuation ring, to appear in Osaka J. Math.

[M2] K. Miyamoto, On periodic stable Auslander–Reiten components containing Heller lattices over the symmetric Kronecker algebra, arXiv: 1808.09289.

[P] A. Poulton, Almost split sequences for Knörr lattices, arXiv:1312.4475.

[Ri] C. Riedtmann, Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück, Comm. Math. Helv. **55** (1980), 199–224.

[Ri2] C. Riedtmann, Representation-finite selfinjective algebras of class A_n, Lecture Notes in Mathematics **832** (Springer, Berlin, 1980), 449–520.

[Ro2] K. W. Roggenkamp, The lattice type of orders II: Auslander–Reiten quivers, in Integral Representations and Applications (Oberwolfach 1980), Lecture Notes in Mathematics **882**, Springer, Berlin New York, 1981, 430–477.

[SY1] A. Skowroński, K. Yamagata, Frobenius Algebras I, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, 2011.

[SY2] A. Skowroński, K. Yamagata, Frobenius Algebras II, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, 2017.

[T] G. Todorov, Almost split sequences for DTr-periodic modules, Lecture Notes in Mathematics **832** (Springer, Berlin, 1980), 600–631.

[We] P. J. Webb, The Auslander-Reiten quiver of a finite group, Math. Z. **179** (1982), 97–121.

[Wi] A. Wiedemann, Orders with loops in their Auslander-Reiten graph, Communications in Algebra **9(6)** (1981), 641–656.

[WW] B. Wald and J. Waschbüsch, Tame biserial algberas, J. Algebra, **95** (1985), 480–500.

[Y] Y. Yoshino, Cohen-Macaulay Modules over Cohen-Macaulay Rings, London Mathematical Society Lecture Notes Series **146**, Cambridge University Press, 1990.

Department of Pure and Applied Mathematics,

Graduate School of Information Science and Technology,
Osaka University,
Suita, Osaka 565-0871 Japan

Email address: `k-miyamoto@ist.osaka-u.ac.jp`